$$\begin{array}{ccccccc} \left\{\begin{array}{l} + \\ 0\ | \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} & \left\{\begin{array}{l} +\ | \\ 0 \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{\alpha\ N} & \left\{\begin{array}{l} + \\ 0\ | \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{\gamma\ \alpha\ N} & \qquad (\alpha<1、\gamma<1) \\ \mathrm{S} & & \mathrm{T} & & S' & & \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{cccccc} \left\{\begin{array}{l} + \\ 0\ | \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} & \left\{\begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} & \left\{\begin{array}{l} +\ | \\ 0 \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{0} \\ \mathrm{S} & & \mathrm{T} & & S' & \end{array} \tag{2}$$

(1) 式から (2) 式へ T と S' の遮蔽物を変更した際に現れる、量子力学の振幅干渉について調べる。
(2) 式の装置では、原子が T から S' へ通り抜ける振幅は (3) 式となる 。

$$\langle\ 0\ S|+T\rangle\,\langle+T|+S\rangle+\langle\ 0\ S|0\ T\rangle\,\langle\ 0\ T|+S\rangle+\langle\ 0\ S|-T\rangle\,\langle-T|+S\rangle=0 \tag{3}$$

(4) 式の実験では、＋ S 状態にあった情報はあたかも T 装置が存在しなかった時と同様に残される。

$$\begin{array}{cccccc} \left\{\begin{array}{l} + \\ 0\ | \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} & \left\{\begin{array}{l} + \\ 0 \\ - \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} & \left\{\begin{array}{l} + \\ 0\ | \\ -\ | \end{array}\right\} & \xrightarrow{N} \\ \mathrm{S} & & \mathrm{T} & & \acute{S} & \end{array} \tag{4}$$

振幅は (5) 式のように書ける[*1] 。

$$a=\langle+S|+T\rangle\,\langle+T|+S\rangle+\langle+S|0\ T\rangle\,\langle\ 0\ T|+S\rangle+\langle+S|-T\rangle\,\langle-T|+S\rangle=1 \tag{5}$$

したがって T でなくとも任意の開いたフィルターを用いることによって変化をもたらさない原理が成立する。ただし、条件として３つのビームに不平等な撹乱を与えてはいけないことが必要である。もし電場等で一方のビームに撹乱を与えた場合、波の位相を変化させてしまい、すべての原子との干渉が変化してしまうからだ。(+T),(0T),(-T) の状態を任意の状態 i を用いて (3) 式,(5) 式を書き換えると (6) 式,(8) 式となる。

$$\sum_{all\,i}\langle\ 0\ S|i\rangle\,\langle i|+S\rangle=0 \tag{6}$$

$$\sum_{all\,i}\langle+S|i\rangle\,\langle i|+S\rangle=1 \tag{7}$$

同様にして S' を任意のフィルター R で置き換え、T 装置を取り除くと (8) 式で表される。

$$\sum_{all\,i}\langle+R|i\rangle\,\langle i|+S\rangle=\langle+R|+S\rangle \tag{8}$$

はじめの状態と終わりの状態にかかわらず、i のような一組の完全な状態があるときに成立する。完全な状態であるためには i のそれぞれの基本状態は完全に別物である必要があり、たとえばその中の i と j に関する特定の任意の基本状態は (9) 式を満たすことになる。

$$\langle j|i\rangle=\delta_{ji}=\left\{\begin{array}{ll} 1 & (\mathrm{j}=\mathrm{i}) \\ 0 & (\mathrm{j}\neq\mathrm{i}) \end{array}\right. \tag{9}$$

[*1] $|a|^2=1$ であるが一般には $e^{i\delta}$ である。$\delta=0$ と選んでも一般性は失わない。

ここで (10) 式のような実験を考えた場合、

$$\left\{\begin{matrix} + & \\ 0 & | \\ - & | \end{matrix}\right\} \xrightarrow{N} \left\{\begin{matrix} + & \\ 0 & \\ - & \end{matrix}\right\} \tag{10}$$

$$\text{S} \qquad\qquad \text{T}$$

(＋ S) から (＋ T) へ移動する確率は (11) 式のように表されるので、(10) 式で得られる確率の関係式は (12) 式で書ける。

$$|\langle +T|+S\rangle|^2 = \langle +T|+S\rangle \langle +T|+S\rangle^* \tag{11}$$

$$\langle +S|+T\rangle \langle +S|+T\rangle^* + \langle +S|0\ T\rangle \langle +S|0\ T\rangle^* + \langle +S|-T\rangle \langle +S|-T\rangle^* = 1 \tag{12}$$

先ほどの (5) 式をもう一度もってきて (12) 式と (13) 式を比べてみると

$$\langle +S|+T\rangle \langle +T|+S\rangle + \langle +S|0\ T\rangle \langle\ 0\ T|+S\rangle + \langle +S|-T\rangle \langle -T|+S\rangle = 1 \tag{13}$$

$$\langle +T|+S\rangle = \langle +S|+T\rangle^*$$
$$\langle\ 0\ T|+S\rangle = \langle +S|0\ T\rangle^*$$
$$\langle -T|+S\rangle = \langle +S|-T\rangle^*$$

が得られる。これは始状態から終状態への振幅は、終状態から始状態への逆位相の振幅に等しいことを表す。

最後に振幅に関する一般的法則をまとめる。任意の始状態 ϕ、終状態 χ と置くと

$$\langle j|i\rangle = \delta_{ji} = \begin{cases} 1 & (\mathrm{j} = \mathrm{i}) \\ 0 & (\mathrm{j} \neq \mathrm{i}) \end{cases}$$

$$\sum_{all\, i} \langle \chi|i\rangle \langle i|\phi\rangle = \langle \chi|\phi\rangle$$

$$\langle \chi|\phi\rangle = \langle \phi|\chi\rangle^*$$

(備考)

エルミート演算子 A の固有値 a の固有ケット $|a\rangle$ を考える。

$$A\,|a\rangle = a\,|a\rangle$$

$|a\rangle$ を規格化して $\{|a\rangle\}$ が規格直交系をつくる。

$$\left\langle a' \middle| a" \right\rangle = \delta_{a'a"}$$

ケット空間全体が A の固有ケット $|a\rangle$ で張られていることを要請すると $\{|a\rangle\}$ は完全規格直交系をつくる

$$\sum_a |a\rangle \langle a| = \hat{1}$$

これは恒等演算子であり、完備関係式あるいは閉包 (クロージャー) と呼ばれる。

参考文献

- ファイマン物理学　量子力学
- 現代の量子力学　J.J.Sakurai