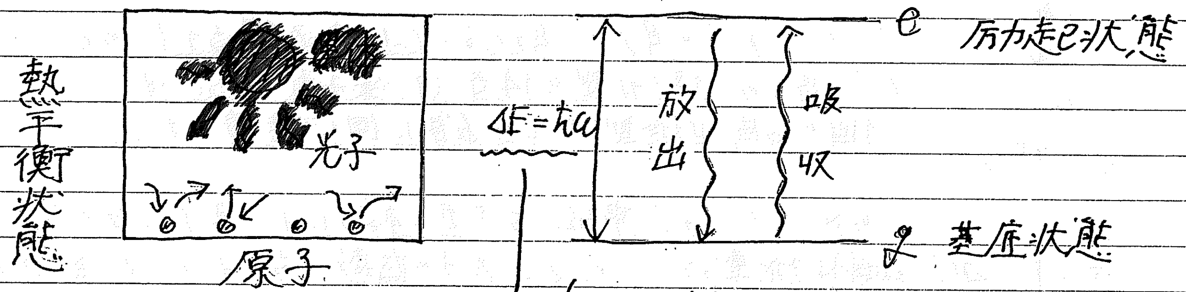
4－5. 黒体によるスペクトル

佐々木 侑輝

63 黒体 → あらゆる周波数の電磁波を完全に吸収するような物質

黒体放射 → 黒体から放射される電磁波
（熱平衡にある電磁場と同じスペクトルをもつ）



→（原子の調和振動子を考える。）

平均原子数を N_g（基底状態）N_e（励起状態）とすると、温度 T の熱平衡状態では、

64 $$\frac{N_e}{N_g} = e^{-\Delta E/k_BT} = e^{-\hbar\omega/k_BT} \qquad (4.30)$$

○ 原子は光子の放出と吸収を行う → 平衡状態では放出と吸収の割合は同じ

ある状態にある光子の平均数を $\bar{n}$、
光子が一つもないときに、原子が1個の光子を放出する確率 $|a|^2$、

→ 原子がもう1個の光子を放出する確率 $(\bar{n}+1)|a|^2$
→ 原子が $\bar{n}$ 個のうち、1つの光子を吸収する確率 $\bar{n}|a|^2$

→ $$\underbrace{N_e(\bar{n}+1)|a|^2}_{\text{光が放出される割合}} = \underbrace{N_g \cdot \bar{n}|a|^2}_{\text{光が吸収される割合}}$$

→ $$N_e(\bar{n}+1) = N_g\,\bar{n} \qquad (4.31)$$ 、(4.31)に(4.30)を代入し式変形

→ $$\bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1} \qquad (4.32)$$

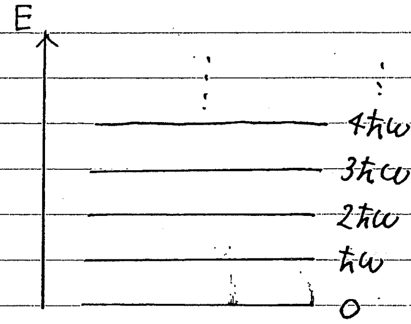
↳ 熱平衡になっている空洞内において振動数 ω の任意の状態にある光子の平均数を与える

振動数 ω の光子のエネルギーは $\hbar\omega$ なので、$\bar{n}$ 個の光子のエネルギーは $\bar{n}\hbar\omega = \dfrac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT} - 1}$

―(4.33)

4-5. 黒体によるスペクトル

佐々木侑輝



65. 調和振動子のエネルギー準位

任意の調和振動子の量子力学的なエネルギー準位は等間隔ħωをもつ。平均エネルギーは(4.33)で与えられる。

ここでは光子の数を数えることによって得られたので、光子と原子の平衡状態の体系は、量子力学的には1個の調和振動子と正確に同じ性質をもつ。

この同一性により、電磁波を光の粒子によって表すことができる。

よって、電磁場は、量子化された調和振動子として、また光子の個数を与えることにより記述でき

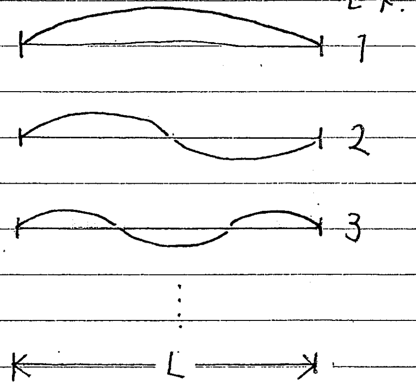
・いままでは、電磁場の振動の特定のモード(振動数ω)に関連して平均エネルギーを計算した

・黒体放射の法則は、微小な振動数の間隔 ω から $\omega+\Delta\omega$ の間にある光によって運ばれる単位体積当りのエネルギーとして述べられているので、間隔$\Delta\omega$の間の振動数をもつモードが何個あるかを知る必要がある。

↳ これは定常波に関する純粋に古典的な問題であり、立方体の箱の場合について考える。(結果はどんな形の箱でも同じ)

◎ まず1次元の場合における定常波のモード数を求める。
各モードがその両端で0であるためには、正弦波でなければならない。
→ ある長さの中に半波長の整数倍が含まれる。

66.



「波数の定義 $k = 2\pi/\lambda$」

j番目のモードの波数 $k_j = 2\pi/\lambda_j$ とすると、(j:整数)

$\lambda_j = \dfrac{2L}{j}$ より $k_j = 2\pi/\lambda_j = 2\pi\Big/\dfrac{2L}{j} = \dfrac{j\pi}{L}$ (4.34)

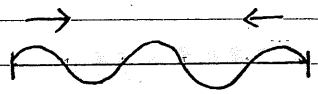
隣り合うモードの間隔 $\delta k = k_{j+1} - k_j = \dfrac{\pi}{L}$ となる。

ここで k は十分大きくて、小さな間隔Δkの中に多くのモードがあると仮定する。Δkのモードの数をΔNとすると、

$$\Delta N = \frac{\Delta k}{\delta k} = \frac{L}{\pi}\Delta k \qquad (4.35)$$

4-5, 黒体によるスペクトル

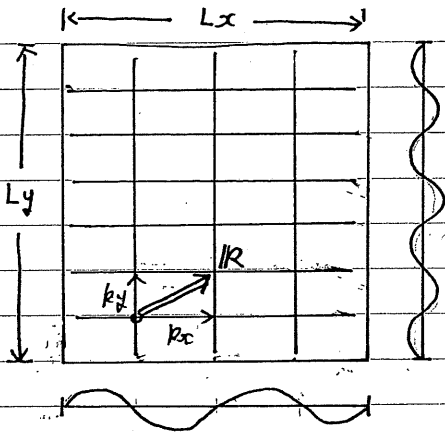
佐々木 侑輝



1つのモードは反対向きに進行する二つの波の和の定常波である。
→ 定常波が二つの別の光子の状態を含んでいると考える。

1つの光子の状態を考えたいので ΔN を2で割る必要がある → $\Delta N = \frac{L}{2\pi}\Delta k$ (4.36)

◎ 1次元から3次元へ拡張



x.y.z 軸についてそれぞれ考えると、波数は

$$k_i = \frac{j_i\pi}{L_i} \quad (i = x.y.z)$$ をうる。

Δk_i の間隔内のモードの数は

$$\frac{L_i}{2\pi}\Delta k_i \quad (i = x.y.z)$$ で与えられる。

よって、ベクトル $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ に対するモードの数を $\Delta N(\mathbf{k})$ とすると

$$\Delta N(\mathbf{k}) = \frac{L_xL_yL_z}{(2\pi)^3}\Delta k_x\Delta k_y\Delta k_z \quad (4.37)$$

$L_xL_yL_z = V$, 波数(k)空間における微小体積 $\Delta k_x\Delta k_y\Delta k_z = d^3\mathbf{k}$ に比例する

○ (4.37) → $\Delta N(\mathbf{k}) = V\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}$ (4.38)

○ 真空中では、光の波数kの大きさと角振動数ωの間には $|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}$ の関係がある (4.39)

(波数の定義 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ → $|\mathbf{k}| = k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(c/\nu) = 2\pi\nu/c = \omega/c$ 　c: 光速 ν: 振動数)

○ $k \sim k+\Delta k$ の間の波数(k)空間における体積は、球殻の体積 $d^3\mathbf{k} = 4\pi k^2\Delta k$ である。

→ (4.39) より $\Delta k = \frac{\Delta\omega}{c}$ の関係が成り立つので Δω内の振動数をもつモードの数は

$$(4.38) \rightarrow \Delta N(\omega) = V\frac{4\pi k^2}{(2\pi)^3}\Delta k = V\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\frac{\Delta\omega}{c} = \frac{V\omega^2\Delta\omega}{\pi^2c^3} \quad (4.42)$$

4-5. 黒体によるスペクトル

佐々木 侑輝

(4.33)で各モードは平均として $\bar{n}\hbar\omega = \dfrac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}$ のエネルギーをもつ

これにモードの数を掛け算すると、間隔 $\Delta\omega$ の範囲内のエネルギー ΔE をうる。

$$\Delta E = \bar{n}\hbar\omega \times \underbrace{\Delta N(\omega)}_{\text{モード数}} = \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_BT}-1}\cdot\frac{V\omega^2}{\pi^2c^3}\Delta\omega \qquad (4.43)$$

↳ 黒体放射の振動数のスペクトルの法則

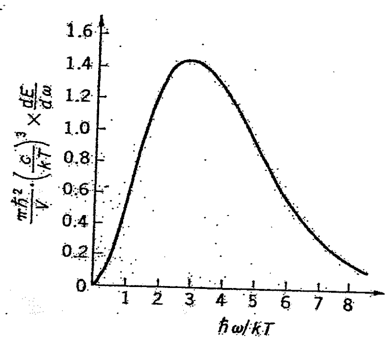


図 4-10　熱平衡の空洞における放射の振動数スペクトル，"黒体"のスペクトル