Relativistic Two-body Simulation(RTS)

山形大学理工学研究科修士課程 2 年

伊藤 祐輔

2001 年 7 月 18 日

1 概要

今回 simulation を自分で書こうと思った動機としては、イベント発生に関する位相空間への理解をより深めたいと考えた為である。また、自分が知りたい物理的な現象を計算機に計算させる為のルーチンを作る事を学ぶ為のいい機会であると考えた為である。 今後、いろいろな物理現象を考える時に計算機にそれらを simulation させる事は役立つと思っている。今回は言語としての興味と Geant4 を使うであろう今後の事を考えて C++ を使った。

2 具体的な計算

2.1 全体の流れ

計算は以下の手順で行うものとする。

1. 入射粒子とターゲット粒子を決定する
   $\Downarrow$
2. 実験室系での運動量を決める
   $\Downarrow$
3. 系を重心系へ Lorentz Boost する
   $\Downarrow$
4. 重心系での各粒子の運動量、エネルギーなどを求める
   $\Downarrow$
5. 粒子同士の散乱が起きたとして、位相空間における運動量分布に従ったイベントを発生させる
   $\Downarrow$
6. 散乱後の各粒子の運動量、エネルギーなどを求める
   $\Downarrow$
7. 系を重心系から再び実験室系へ Lorentz Boost する
   $\Downarrow$
8. 各粒子の運動量、エネルギーなどを求める

2.2 位相空間 (二粒子の場合)

まず、位相空間とは単位エネルギーに存在する事の出来る状態の数の事である。他の言葉にしてみれば単位エネルギーあたりの状態密度であるといえる。
まず手始めに粒子の崩壊を考えてみる。

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C} + \mathbf{D}$$

これは $\mathbf{A}$ と言う粒子が $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ という粒子に崩壊している様子を表わしている。
まずは崩壊前の状態を考える。実験室系として $\mathbf{A}$ が静止している系を取るとする。これに対する重心系を考えてみると、これは実験室系と同じである事は明らかである。よって実験室系において $\mathbf{A}$ が二体に崩壊すると $\mathbf{B}$ と $\mathbf{C}$ は同じ運動量を持つ事が分かる。つまり $\mathbf{A}$ の rest mass に相当するエネルギーを、崩壊後の各粒子の運動量が同じになるように分配する事が義務づけられる。ここで $\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$ 各粒子の質量が決まっている物と仮定してみると、それらが持つ運動量の大きさは $\mathbf{A}$ の質量に対して一意に決まってしまう。

粒子が崩壊する例で引き続き考えてみる。
粒子が崩壊する前に持っているエネルギーが決まっていると仮定する。すると、崩壊後に放出されるエネルギーもエネルギー保存則より同じ大きさになる。よって rest mass の中から放出される粒子の質量を作り、またそれらに運動量を与えると考える事が出来る。つまり、作られる粒子の質量またはその個数が少ないほど (言い換えれば各粒子の運動エネルギーになる分のエネルギーが多いほど) 崩壊後の粒子の取る事の出来る状態は多いのである。これを位相空間の観点で見てみると、使用できるエネルギー幅が大きいほど崩壊後の各粒子が取り得る状態数は増える事がこれに対応している。よって崩壊後の粒子の質量やその個数が少ない方が状態としては取りやすい、つまりは起こりやすいと言える。

では具体的に二体の位相空間を計算してみる。
自由な一粒子について考えてみる。不確定性原理により、この位置と運動量を完全に、かつ同時に測定する事は出来ず、その不確定さは

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$$

で表わされる。この粒子に関しての情報は h^3 の空間内では得る事が出来ない。これを状態の大きさの単位とする。この自由な粒子が持てる状態の数というものは、

$$N_1(energy \leq E) = \frac{1}{h^3} \iint d\mathbf{x}\, d\mathbf{p}$$

ただしこの $\mathbf{p}$ は 3 元運動量である。粒子数が 2 個に増えると

$$N_2(energy \leq E) = (\frac{1}{h^3})^2 \iiiint \prod_{i=1}^{2} d\mathbf{x}_i\, d\mathbf{p}_i$$

ここで $\int d\mathbf{x}$ を V(体積) とすると

$$N_2(energy \leq E) = (\frac{V}{h^3})^2 \iint \prod_{i=1}^{2} \ d\mathbf{p}_i$$

ここで係数=1 として省略すると

$$N_2(E) = \iint d\mathbf{p}_1 \, d\mathbf{p}_2$$

ここで相対論的に不変な位相空間を計算する為に３元運動量を４元へと拡張する事にする。それは大文字で表わす事にして

$$N_2(E) = \iint d\mathbf{P}_1 \, d\mathbf{P}_2$$

ここでまた一粒子について考える。$dP = dp \, dE$ なので

$$N_1(E) = \int d\mathbf{P}_1$$

積分する運動量は運動量、エネルギー保存を満たしている必要があるので

$$\begin{aligned}
N_1(E) &= \int d\mathbf{P}_1 \delta(P - \sum_{i=1}^{1} P_i) \\
&= \int d\mathbf{P}_1 \delta(P - \sum_{i=1}^{1} P_i) \\
&= \int d\mathbf{p}_1 dE_1 \delta(E^2 - p^2 - m^2) \\
&= \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2E}
\end{aligned}$$

よって

$$= \int \frac{d\mathbf{p}_1}{2E} \delta\{E - \sum_{i=1}^{1} E_i\}$$

ただし

運動量保存 .... $\sum \mathbf{P}_i - P = 0$

エネルギー保存 .... $\mathbf{P_i} - {m_i}^2 = 0$

$$\int \delta\{(\Phi(x))\} dx = \frac{1}{|\Phi'(x_0)|}$$

$$\int dE \delta\{\sum_{i=1}^{n} (E_i - E)\} = 1$$

である。

ここで二体の場合に考えを戻す事にする。二体の場合の状態数は一体の場合同士の状態数の積になるので

$$\frac{d\rho_2}{dp_1} = \pi / E = const$$

以上のようにして二体の場合の位相空間が求められる。この事は重心系において崩壊後の粒子の運動が任意の方向に対して一様な確率で起こり得る事を表わしている。

2.3　イベント発生について (Program)

上で計算して分かったように、二体の衝突において起こるイベントというものは位相空間の観点から見るとすべての方向に対して等方的に起こりえる。また散乱後の各粒子の運動を重心系で見ると、運動量は互いに等しい値をもっている。この事よりそれらを大きさを一定としてその方向を $0.0 \leq \theta < 2\pi(\theta : x$ 軸との角度) の間で任意に振る事でそのようなイベントを表わす事が出来ると考える。
よって使用するのは一様乱数でその大きさは $0.0 \leq \theta < 2\pi$ である。これは C のライブラリである stdlib の rand() を使用して発生させる事にする。また乱数が毎回同じにならないように乱数の種は srand() 関数に 1970 年 1 月 1 日からの秒数を返す time(0) 関数を与える事で毎回違う乱数を発生させる事にした。

2.4　Lorentz 変換

実験室系と重心系の Lorentz 変換の計算をしてみる。
まず実験室系において、2 粒子がいるものとする。一つはターゲット粒子として実験室系へ静止している。もう一つはビーム粒子としてある大きさの運動量を持って運動している。ここで、このビーム粒子の運動方向を **x** とする。まずは一つの粒子について考える。

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \text{ ....実験室系}$$
$$\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}\text{.........重心系}$$

$\underline{Lorentz\ \text{変換}}$

$$x' = \gamma(x - vt) \tag{1}$$
$$y' = y \tag{2}$$
$$z' = z \tag{3}$$
$$t' = \gamma(t - vx/c^2) \tag{4}$$

ただし、v は実験室系と重心系の相対速度であり、γ は $1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ である。
ここで $x' \rightarrow x' + dx'$, $y' \rightarrow y' + dy'$, $z' \rightarrow z' + dz'$, $t' \rightarrow t' + dt'$ と置くと

$$x' + dx' = \gamma\{x + dx - v(x + dx)\} \tag{5}$$
$$y' + dy' = y + dy \tag{6}$$
$$z' + dz' = z + dz \tag{7}$$
$$t' + dt' = \gamma\{t + dt - v(x + dx)/c^2\} \tag{8}$$

ここで各式を引き算すると

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma(dx - vdt) \end{aligned}$$

よって重心系における粒子の速度 $\mathbf{u}$ は

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} \text{ .....実験室系}$$
$$\mathbf{u}' = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k}\text{.........重心系}$$

とすれば、以下のように関係づけられる。

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma(dt - vdx/c^2)} \\
&= \frac{dt(u_x - v)}{dt(1 - vu_x/c^2)} \\
&= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2} \\
u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - vdx/c^2)} \\
&= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 - vu_x/c^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{\gamma}\frac{u_y}{1 - vu_x/c^2} \\
&= 0 \\
u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - vdx/c^2)} \\
&= \frac{1}{\gamma}\frac{1}{1 - vu_x/c^2}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{1}{\gamma}\frac{u_z}{1 - vu_x/c^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

ここで u_i(i=x,y,z) は $\frac{dr_i}{dt}$ の事である。さらに実験室系において u_y, u_z=0 なので $u'_y, u'_z = 0$ である。よって重心系における各粒子の運動量を実験室系での運動量の式として求める事が出来る。
また逆に重心系から実験室系への Lorentz 変換は v→-v としてその上で u'_x, u'_y, u'_z と u_x, u_y, u_z を交換すればいいだけである。
そうすると

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\
u_y &= \frac{1}{\gamma}\frac{u'_y}{1 + vu'_x/c^2} \\
&= 0 \\
u_z &= \frac{1}{\gamma}\frac{u'_z}{1 + vu'_x/c^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

で、表わす事が出来る。これにより散乱前の実験室系の運動量が分かれば、重心系における各粒子の運動の様子も分かり、また重心系における散乱後の各粒子の運動量が分かれば、

実験室系での運動量へと変換も出来る。

　詳しいプログラムへの反映のさせ方などは省略する。プログラム自身を最後に載せるのでそれを見て確かめる事にする。

3　計算結果

　計算をした結果は以下に載せる。

4　考察