磁場解析

山形大学理工学研究科M 1
伊藤 祐輔

平成 13 年 6 月 1 日

1　ホール素子のキャリブレーション

今回は AIDA の実験グループで使用された Magnet(BENKEI) の磁場測定で得られたデータを解析する。そこでまずはホール素子の calibration を目的とする。具体的にはホール素子と取り付け軸の *angular misalignment*、およびホール効果 (normal , planar) を得られた電圧から変換する為に必要な 2 つのホール係数、そして係数それぞれの温度依存性を求める。ホール素子とは、ホール効果により生じる電圧を測定するものである。まずはこのホール素子のデータをメインデータとして、それのホール係数の解析を進めていく。

1.1　ホール素子の原理とその特性

1.1.1　ホール素子の構造

ホール素子とはホール効果を用いてある点における磁場の大きさを測定する素子の事である。その形状は様々であるが、今回は板状の素子を用いた。ホール効果については以下で詳しく述べるとして、ここでは詳しい構造について述べる。

1.2　ホール効果とその二次の効果

ある板状の導体がある時の事を考えてみる。
この中を電子が安定して一様に流れている状態、つまり定常電流が流れている状態を考える。この導体にある大きさの磁場がかかってくるとすると、この電子は速度を持って運動している為に常にローレンツ力を受けて運動を続ける事になる。
ここで、ローレンツ力とは電荷 q を持った粒子がある速度 $\mathbf{v}$ で運動して

いた時に、それに対して一定の大きさの磁場 $\mathbf{B}$ がかけると荷電体が受ける力の事を言うのである。この力の大きさは

$$\mathbf{F} = q\ \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

で表される。この $\mathbf{F}$ が $\mathbf{v}$ と $\mathbf{B}$ のベクトル積で表現される事からも分かるように、力 $\mathbf{F}$ の向きは $\mathbf{v}$ と $\mathbf{B}$ のどちらにも常に直行するのである。
電荷は導体中を流れているので $\mathbf{v}$ は導体に平行な向きを持っている。次に $\mathbf{B}$ の向きを導体面に対して垂直であると仮定してみると、ローレンツ力 $\mathbf{F}$ は導体平面内にあり、かつ $\mathbf{v}$ とも垂直な向きを向いているといえる。なので、今その状態を仮定すると電荷担体は電流の流れに対してそれが横に逸れる方向に力を受ける事になり、電荷が素子平面上のある一方に偏って局在するような状況が生じてしまう。つまり、導体の端と端との間には電位差が生じるのである。

このように、電流が流れている素子面上に磁場がかかる事により、電位差が生じる効果をホール効果と呼ぶ。
この効果を用いて磁場の大きさを図ろうと設計されたのがホール素子と呼ばれる素子である。ただし、一般にはこの他にもこのホール効果の二次の効果として知られるプレナーホール効果 (planar hall effect) と呼ばれる効果も働く為に、より複雑な考察が必要となる[1]
以上の二つの効果により、実際に素子に生じる電位差は次のようになる。

$$V = RB_nI - PB_t{}^2I\sin 2\psi + V_0 \tag{1}$$

B_n : 磁場の素子平面に垂直な方向 (**n**ormal conmponet) の大きさ
B_t : 磁場の素子平面方向 (**t**angential component) の大きさ
R : ホール係数 , I:電流の大きさ , P : プレナーホール係数
ψ : I と $\mathbf{B}_t$ の為す角度 , V_0 : residual voltage

1.3 解析するデータとその方法

1.3.1 データのフォーマット

解析方法について述べる前に、データの保存形式等についてふれておく。
今回解析したデータはテキスト形式で保存されている。そしてそれらはスペース文字で 7 行に区切られており、以下のようなフォーマットになっている。

[1] **F.Schoff,CERN ISR-MA 174–48**

1 ; date　2 ; angle [degree]　3 ; V_x [mV]　4 ; V_y [mV]　5 ; V_z [mV]
6 ; Hall current [0.1A]　7 ; temprature [mV]

1 行目はデータを取った日付、2 行目は回転角度、3 行目 ~ 5 行目は各素子に生じた電圧の大きさ、6 行目は電流値、7 行目は温度を電圧で測定した値である。
さらにこれらのデータは回転軸が異なる二つの種類に分類できる。一つは回転軸を Y 方向の磁場を測定する為に置かれた素子に取り付けたものである。この場合は Y, Z の各方向がホール効果が大きく見える方向になる。これが Y∗.dat である。そしてもう一つは回転軸を Z∗.dat であり、回転軸は Z 方向の磁場を測定する為に置かれた素子に取り付けられている。この場合はホール効果が大きく見える方向は Y∗.dat とは異なり、X, Y 方向がその方向になる。一つ注意すべき点はホール効果が大きく見える方向と大きく見えない (言い換えればプレナーホール効果が見えやすい) 方向では ψ は異なる変化を見せるという事であるが、それはまたフィッテングのところで詳しく述べる。

1.4　軸と素子の *angular misalignment*

1.4.1　*angular misalignment* と補正方法

ホール素子の位置を変える為に、素子は軸に取り付けられている。それは理想的には素子平面に対して完全に水平にもしくは垂直に取り付けられているべきである。そうでなければそれぞれ B_n,B_t が B_x,B_y,B_z の個々に純粋に対応出来ないからである。もし取り付けが完全であるならば B_n,B_t には B_x,B_y,B_z の大きさが一対一で対応するのである。

しかしながら実際には取り付けには必ずといっていいほど軸のずれが生じる。言い換えれば軸と素子平面は完全に平行、もしくは垂直にはならないのである。これが生じる理由としては、取り付け精度の問題や取り付け方の問題などさまざまであるが、とにかくこのようなずれは必ず生じてしまうのである。また一般的な場合としてこのようにずれが生じる場合を考えておけば、取り付けのずれが無い場合はずれが 0 であるという極限で与えられるので、このような考察は有用である。

この取り付けられた時に生じるずれの事を”*angular misalignment*” と呼ぶ。これにより、ホール素子面に対して **B** を垂直に入れる事は難しくなり、ホール素子は normal 及び planar、2 つの効果を同時に観測してしまう事になるのである。そこで、この *angular misalignment*(以下 $\Delta\theta$) を実

際に求めてやる必要が当然出てくる。そうでないと、実際の磁束密度の値はどの程度なのか評価してやる事が出来ないのである。

そこで、それを求める方法として今回はホール素子を回転させると言う方法をとる。回転軸は取り付け軸となる。素子を回転させるとその回転の角度によって B_n と B_t はそれらの大きさを持った各方向のベクトルの合成結果が $\mathbf{B}$ となるように互いに相関をもって値を変動させる。その回転に対する $\mathrm{Hall\ voltage}$ を観測することにより、$\Delta\theta$ を求める。それにはまず、回転軸に水平もしくは垂直に付けられているはずの素子に対する磁場の強さ (磁束密度) である B_n と B_t が原理的にどのように変化するのかを知らなければいけない。よって、まずは B_n と B_t の大きさがどのようにして求められるのかを考える。が、その前にこの $angular\ misalignment$ について少し確認する。まず、$angular\ misalignment$ は軸と素子との傾きであるという事。そしてそれは $\mathrm{X,Y,Z}$ 方向すべてに共通であるという事である。つまり、もし素子同士も直角ではなく多少のずれを生じていると考えると、全ての方向の $angular\ misalignment$ を考えないといけない事になる。しかしこのずれは $angular\ misalignment$ に比べると小さいものであり、ここではそこまでは考えずに全ての素子が互いに直交する事を前提として考える。

1.4.2 回転によるホール電圧の変化への考察

ホール素子を回転させた場合の B_n と B_t の変化についての考察する。$\mathbf{n}$ を素子平面の法線ベクトル $(\text{大きさ } 1)$、$\mathbf{t}$ を素子平面の平面ベクトル (大きさは不定) とする。回転軸は Z 軸とする。

まずは $\mathbf{n}$ を求める。回転しても変わらない $\mathbf{n}$ の成分とは Z 方向の成分である $\mathbf{n}_z$ である。その大きさは

$$\mathbf{n}_z = n\ \cos\phi\ \mathbf{k}$$

である。ここで n は $\mathbf{n}$ の大きさの事であり、また i, j, k は $\mathrm{X,Y,Z}$ 各方向の単位ベクトルである。ここで $\mathbf{n}$ の残りの部分、つまり $\mathbf{n}_x$,$\mathbf{n}_y$ はすぐに求める事が出来て

$$|\mathbf{n}_{xy}| = n|\sin\phi|$$

が $\mathbf{n}$ の XY 平面への射影なので、これを各方向に分解してやると

$$\mathbf{n}_x = n\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i}$$

$$\mathbf{n}_y = n\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j}$$

となる。そして最初に書いたとおり $\mathbf{n}$ の大きさは 1 なので $\mathbf{n}$ が求まり、

$$\mathbf{n} = \sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \cos\phi\,\mathbf{k} \tag{2}$$

と言うように導く事が出来る。
次にこれを用いて t を導出する。
まず t は B の平面成分であり、それを式で表すと

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{n} + \mathbf{t} \tag{3}$$

である。ここで α は $\mathbf{B}_n$ の大きさである。さらに $\mathbf{n}$ と $\mathbf{t}$ にはもう一つの関係式があり、それは互いに必ず直交すると言う事である。それを式として表すと

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{t} = 0 \tag{4}$$

この (3),(4) の二つの式より、$\mathbf{t}$ を導き出せる。
まず (3) を使う。がその前に $\mathbf{t}$ を

$$\mathbf{t} = t_x\mathbf{i} + t_y\mathbf{j} + t_z\mathbf{k}$$

と置いておく。すると

$$\alpha(\sin\phi\cos\theta\mathbf{i} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{j} + \cos\phi\mathbf{k}) + (t_x\mathbf{i} + t_y\mathbf{j} + t_z\mathbf{k}) = B\mathbf{i}$$

$$\therefore\ t_x = B - \alpha\sin\phi\,\cos\theta\ ,\ t_y = -\alpha\sin\phi\,\sin\theta\ ,\ t_z = -\alpha\cos\phi \tag{5}$$

次に (4) を計算する。

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}\cdot\mathbf{t} &= n_x\cdot t_x + n_y\cdot t_y + n_z\cdot t_z \\
&= \sin\phi\,\cos\theta(B - \alpha\sin\phi\,\cos\theta) + \sin\phi\,\sin\theta(-\sin\phi\,\sin\theta) + \cos\phi(-\cos\phi) \\
&= B\sin\phi\,\cos\theta - \alpha\sin^2\phi\cos^2\theta - \alpha\sin^2\phi\sin^2\theta - \alpha\cos^2\phi \\
&= B\sin\phi\,\cos\theta - \alpha(\sin^2\phi\cos^2\theta - \sin^2\phi\sin^2\theta - \cos^2\phi) \\
&= B\sin\phi\,\cos\theta - \alpha = 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \alpha = B\ \sin\phi\ \cos\theta \tag{6}$$

これより t を求める事ができ、

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{t} = \left((\frac{1}{\sin\phi\ \cos\theta}) - \sin\phi\ \cos\theta \right) \mathbf{i} - \sin\phi\ \sin\sin\theta\, \mathbf{j} - \cos\phi\, \mathbf{k} \tag{7}$$

となる。よってこれをまとめて書くと

$$\mathbf{n} = \sin\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\phi \sin\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}$$

$$\frac{1}{\alpha}\mathbf{t} = \left((\frac{1}{\sin\phi\ \cos\theta}) - \sin\phi\ \cos\theta \right) \mathbf{i} - \sin\phi\ \sin\sin\theta\, \mathbf{j} - \cos\phi\, \mathbf{k}$$

と書ける。よってこれらを $\mathbf{B}$ の各方向への成分、つまり $\mathbf{B}_n$ と $\mathbf{B}_t$ に書き換えてやると

$$\mathbf{B}_n = B\ \sin\phi\ \cos\theta (\sin\phi \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\phi \sin\theta\, \mathbf{j} + \cos\phi\, \mathbf{k}) \tag{8}$$

$$\mathbf{B}_t = B\ \sin\phi\ \cos\theta \{ \left((\frac{1}{\sin\phi\ \cos\theta}) - \sin\phi\ \cos\theta \right) \mathbf{i} - \sin\phi\ \sin\sin\theta\, \mathbf{j} - \cos\phi\, \mathbf{k} \} \tag{9}$$

であり、各ベクトルの大きさは

$$|\mathbf{B}_n| = B\ \sin\phi\ \cos\theta = B_n \tag{10}$$

$$|\mathbf{B}_t| = B \sqrt{1 - \sin^2\phi \cos^2\theta} = B_t \tag{11}$$

である。これを (14) 式に代入する事により、ホール電圧が素子の回転に対してどのような変化をするかと言う事を知る事が出来るのである。つまり、今の場合は回転軸と素子平面が垂直な場合への考察であるのだがこの場合のホール電圧は

$$V = R\, B\ \sin\phi\ \cos\theta\, I - P\, B^2\, (1 - \sin\phi\ \cos\theta)\, I\ \sin 2\psi + V_0 \tag{12}$$

と言う式に従うような変化をするのである。

また、この ϕ は取り付け軸とのずれであるのだが、それを $(\frac{\pi}{2} + \phi)$ として扱えば、回転軸と素子平面が水平な場合への考察へも適応する事が出来ると言える。また回転角に対しては、最初にどの位置から回転を始め

るのかは全くの不定であるのでこの $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は区別をつける事が出来ない。つまり結局意味があるのは、各項の中にある θ に関する三角関数同士を今あるこの相関を変えずに変化させると言う事である。その位相はフィッティングのパラメータに含ませるものとして考え、ここでは $\sin$、$\cos$ のどちらかであるという事を言及しておく。

1.4.3 回転に対する ψ の変化への考察

次に ψ について考えてみる。最初に述べているように ψ とは $\mathbf{B}_t$ と $\mathbf{I}$ の為す角度の事である。これを計算するのだが、まずは $\mathbf{I}$ を求めてみる。

その前にこの ψ の影響の及ぼし方に着目してみる。すると ψ は $\sin$ の 2 倍角で効いている事は (14) 式より明らかである。初期位相にもよるが全体としては、$\sin\psi$ の半分の周期で変動する事が式より分かる。この事は、電流がどちらからどちらへ流れているという事を考えてもそのどちらかであるという事を特定する事は出来ないという事を意味している。[2]

ホール素子に流れる電流 $\mathbf{I}$ は素子平面内を流れている。なので回転により $\mathbf{n}$ と同じ回転を行なう。そしてそれは常にある一定の大きさを持っているとする。その大きさを　$|\mathbf{I}|=I$ とすると $\mathbf{I}$ は以下のように求める事が出来る。まず、電流の方向は任意でいいとして X 方向を仮定する。そして初期の向きを XY 平面内に設定する。すると

$$\mathbf{I}(\theta=0) \;=\; I\left(\cos\phi\mathbf{i}+\sin\phi\mathbf{j}\right)$$

ここで *misalignment* などは回転の際の考察での状況と同じであるとする。そして回転角を適当に決めてやると $\mathbf{I}$ は

$$\mathbf{I} = I\left\{\cos\phi\cos\theta\mathbf{i}+\sin\phi\cos\theta\mathbf{j}+\sin\theta\mathbf{k}\right\} \tag{13}$$

となる。よって前に求めてある (9) 式,

$$\mathbf{B}_t = B\;\sin\phi\;\cos\theta\{\left((\frac{1}{\sin\phi\;\cos\theta})-\sin\phi\;\cos\theta\right)\mathbf{i}-\sin\phi\;\sin\sin\theta\,\mathbf{j}-\cos\phi\,\mathbf{k}\}$$

を使って $\sin 2\psi$ を計算する。つもりであったが、この計算は結構複雑になるので $\sin 2\psi$ と位相差しか違わなく、また多少計算のしやすい $\cos 2\psi$ を

[2]詳しくは 2.3.2 の” 一般的な ψ の考察” のところで詳しく解説する

求める事にする。こうして計算しても、フィッティングをかける時にはすべてを位相差のパラメータが吸収してくれるので、これは間違った考察ではないと言える。

細かい計算を書くと大変なので結果だけを書く。

1 . 軸と素子平面が垂直に取り付けられている場合の $\cos 2\psi(\mathrm{case}\,1)$

$$\cos 2\psi \cong \cos 2\left(\theta + const\right)$$

2 . 軸と素子平面が水平に取り付けられている場合の $\cos 2\psi(\mathrm{case}\,2)$

これは値の関係上 $B^2\ \cos 2\psi$ を求めた。

$$B^2\ \cos 2\psi = B^2\left[\cos^2\theta\left(2\sin^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\right) - 1\right]$$

が計算より得られた結果である。

1.5　データへのフィッティング

1.5.1　パラメータ

フィッティングをかけるには、まず元の式とその中にある決めたい値をフィッティングのパラメータとして決めないといけない。まず、確認の為に元になる式 (14) をここにもう一度書く。

$$V = RB_nI - PB_t{}^2I\sin 2\psi + V_0$$

この式の中で常に値を変えていく変数として扱えるのは回転角 θ だけである。よってこれを変数として考える。

次にパラメータを振り分ける。まず、$\mathrm{residual\,voltage}\ V_0$ は単独の項として存在しているので、一つの独立したパラメータにしても問題は無い。その次に第一項に着目する。これには

$$R_H\,;\text{ホール係数}\quad,\quad \phi\,;\mathit{angular\,misalignment}$$

と言う、二つの未知のものが含まれている。よって、これは相関を持たせないよう別々に扱う事にする。これにより第一項には二つのパラメータが振り分けられる。

最後に第二項について考えてみる。この中にも第一項と同様に二つの未知の値が含まれており

$$P_H\,;\text{プレナーホール係数}\quad,\quad \phi\,;\mathit{angular\,misalignment}$$

がそれにあたる。しかし ϕ は第一項と共通であるので新たに加えられるパラメータは一つだけである。しかし、ここでもう一つ、もしくは二つのパラメータを加えないといけない。それは θ に対する初期位相と ψ に対する初期位相である。これがないのであれば、それぞれに対して明確に初期の位置に対応する位相を与えなければいけないのである。それが無理である事は明かであるのでこれらの位相は必要不可欠であると言える。ただし、一つ必要な場合と二つ必要な場合と言う異なるケースが存在するのは軸と素子平面がどのような位置関係にあるのかに依存する。それは回転により $\mathbf{B}_t$ と $\mathbf{I}$ がどのように変化するのかを考察した時に述べたのでここでは述べないでおく。

以上のようにパラメータを決めた上で実際に式を書いてみる。

1.5.2　フィッティングの式

パラメータをこのようにおいてフィッティングの式を書く。

$Par(1)$: $R_H BI$　, $Par(2)$: $angular\ misalignment$　, $Par(3)$: θの初期位相
$Par(4)$: $P_H B^2 I$　, $Par(5)$: $residual\ voltage$　, $Par(6)$: ψの初期位相

1 . case 1 のフィッティングの式

$$\begin{aligned} y = & Par(1)\ \sin\left(Par(2)\right)\cos\left(x + Par(3)\right) \\ & + Par(4)\left[1 - \left(\sin^2\left(Par\ (2)\right)\ \cos^2\left(x + Par\ (3)\right)\right)\right]\left(\sin(2\left(x + Par(6)\right))\right) \\ & + Par(5) \end{aligned}$$

2 . case 2 のフィッティングの式

$$\begin{aligned} y = & Par(1)\ \cos\left(Par(2)\right)\cos\left(x + Par(3)\right) \\ & + Par(4)\ \left[\cos^2\left(x + Par(3)\right)\left(2\sin^2\left(Par(2)\right)\ \cos^2\left(x + Par(3)\right) + \cos^2\phi\right) - 1\right] \\ & + Par(5) \end{aligned}$$

データは回転角とその時の電圧、と言うようにプロットしてやり、それに対してフィッティングをかけてやる事により全てのパラメータを決めてやる事が出来る。どちらの関数を使うかは、電圧値の大きさを見れば一目瞭然であるので、一度閲覧した上で決める。$Y*.dat$ は $\sim$1mV の時が case 1 であり、50$\sim$60mV の時は case 2 である。同様に $Z*.dat$ は 4$\sim$5mV の時が case 1 であり、$50 \sim 60$mV の時が case 2 に相当する。

しかし例外もある。それは $Z*.dat$ の一部のデータについてである。Z505c.dat,Z505d.dat,Z570d.dat,Z570e.dat,Z625d.dat,Z625e.dat の 6 個のデータがそれにあたる。これらは再び素子を取り付け直して測定をしたデータである。ただ、解析の結果は他のデータと遜色が無かった為、同様の取り扱いをする事とした。これにより得られるのはホール係数、プレナーホール係数、$residual\ voltage$ であるが、これらを全て利用することは出来ない。理由としては、まずフィッティングの式が異なるためである。case 1 ではプレナーホール効果を見る事が出来るが、case 2 ではまず無理である。逆を言えば、case 2 はプレナーホール係数がほとんど無視できるような状態なのでホール係数をしっかりと評価してくれる。つまり、出てきた値をある程度選別してやらないといけない、と言う事は明かである。その事について考えてみる。

case 1 の式から得られた Par(1) は過大評価される。なぜなら Par(1) の方が先に決定されるからである。つまりの決め方としては、まず全体とし

て大きく Par(1) を決めてしまい、それから微調整として他のパラメータを決めていくので Par(1) が大きく評価されてしまう事は必然的であると言える。よって case 1 の式から得られたホール係数は使わない事にして、Par(2) と Par(4) のみを使用する事にする。

同様にして case 2 の式から得られるのは Par(1) のみである。Par(2) は過小評価されるのでこちらは使わない事にする。その理由は上の場合と同じである。

実際のデータへの対応を考える。
$Y*.dat$ は X 方向の電圧が小さく見える。つまり X 方向に case 1 の式を適応すべきであり、他の方向については case 2 の式を与えればよい。$Y*.dat$ は Z 方向の電圧が小さく見えている。よって Z 方向に case 1 の式を適応し、他の方向へは case 2 の式を与える。

1.6 ホール係数の温度依存性

1.6.1 係数の温度依存性に関する大まかな原理

上でも書いたが、データをフィッティングすることにより

$$\underline{\bullet \text{ホール係数}}\ \ R_H$$
$$\underline{\bullet \text{プレナーホール係数}}\ \ P_H$$
$$\underline{\bullet \textit{residual voltage}}\ \ V_0$$

の計 3 つの値を決めることが出来る。ここでこれらには全て温度依存性と言うものが必ず存在する。それについて考えてみる。

ここでホール素子の温度が上昇した場合を考える。一般の物質 (導体) は温度上昇に伴い、抵抗も上昇する。それは物質の構成原子の熱運動が激しくなり、自由電子がとおりにくくなる為である。よって、これによりホール効果による電位差も生じにくくなるのである。これより、R_H と V は負符号で比例すると言えるのである。よってこの比例係数を κ とすれば、

$$R_H = -\kappa\, t + \beta$$
$$(\kappa \geq 0,\ \beta = const\,,\ t; temprature)$$

と言う関係が成り立つはずである。よって X 軸を温度 , Y 軸をホール係数 (およびプレナーホール係数) としてフィッティング結果をプロットし、それに対して最小二乗法でフィッティングをかけてやり、κ を求めてやる。

1.6.2　電圧から温度への変換

今回の測定では温度は電圧として測定されている。これらを再び普段使われている温度の単位である (℃) に変換する。これには実験結果があるのでそれを使った。以下にその結果を記す。

$$temp[mV] = 0.0253\ temp[℃] - 2.4147$$

もしくはこれを逆に解いたものである

$$temp[℃] = 39.5257\ (temp[mV] + 2.4147)$$

により与えられる。

1.7　ホール素子の解析結果

詳しい結果などは最後に載せておく。ここでは、出てきた結果をまとめておく。

⋆ ホール係数

$R_x = -0.0016\ temp + 1.098\ \ [V/T\,A]$

$R_y = -0.0005\ temp + 1.0505\ \ [V/T\,A]$　　(但し, $temp$は温度 (℃))

$R_z = -0.0003 temp + 1.0226\ \ [V/T\,A]$

⋆ プレナーホール係数

$P_x = -0.00003\ temp + 0.0138 [V/T^2\,A]$

$P_y = -0.00003\ temp + 0.0138 [V/T^2\,A]$　　(但し, $temp$は温度 (℃))

$P_z = -0.00001\ temp + 0.0126 [V/T^2\,A]$

⋆ *residual voltage*

$(V_0)_x = -0.0002 temp\ - 0.0716 [mV]$

$(V_0)_y = -0.0196 temp\ + 0.3699 [mV]$　　(但し, $temp$は温度 (℃))

$(V_0)_z = -0.0004 temp\ + 0.0653 [mV]$

これがフィッティングによる結果である。ホール係数は予想どおりの温度依存性を示しており、また全体的に値もまとまっているので結果としては信用に値するものであると思う。

2　磁場の構築

2.1　解析するデータのフォーマット

以上の結果を用いて磁場を構築していく。データは新たなものであり、先ほどまでホール素子の解析に用いたものとは全く異なる物である事だけ述べておく。

まず、データはアスキー形式で保存されている。それらは ”,” で区切られているので、使用上取り扱い易いようにスペース区切り、もしくはタブ区切りにしてやる。

データは以下のようなフォーマットで保存されている。

1 ; date　2 ; time　3 ; count　4 ; x [n]　5 ; y [n]　6 ; z [n]
7; V_x [mV]　8 ; V_y [mV]　9 ; V_z [mV]　10 ; Hall current [A]
11 ; temprature [mV]　12 ; unknown [?]
13 ~ 15 , 17 ; 不要なデータ (x, y, z の余り？)
16 ; NMR 値 [gauss]

2.2　解析方法

2.2.1　データ変換の方法

以上のデータを解析する。まず、解析方法の概要を簡単に示す。

1. 区切り文字をカンマ”,”からスペースに切り替える。
2. 必要なデータだけを抜き出す
3. 変換の必要なデータに変換を施す
4. プロットし易い形にしてやり、paw もしくは excel でプロット

2 に関して付け加えるとすれば、必要なデータとはこれら全てはスクリプトで一括処理できるようにしてある。が、それはこのレポートの最後に添付する事にして、ここでは触れない事にする。

2.2.2　座標系

今回は 3 つの座標系を用いる事になる。それは以下のようになる。

1. $magnet \quad coordinate$
2. $encorder \quad coordinate$
3. $hall \quad (probe) \quad coordinate$

1 は磁石を基とした座標系。今回の解析ではメインとなる座標系である。
2 はホール素子を動かす際に用いる encorder の座標系である。
3 はホール素子が受ける磁場の向きを基として構成される座標系であり、磁場の値に関するものはこの座標系で表されている。

2.2.3 座標変換 (postition)

上で述べたような座標系はそれぞれ便利な場合があり、設定されているのだが解析する時は **1** の $magnet\ coordinate$ が一番便利である。よってこれらを変換する必要がある。その時の座標系の間には以下のような関係があるので、それらを使い変換してやる。但し、ここでは向きのみの関係を表す。

$$x, y, z; magnet\ coordinate\ , \qquad x', y', z'; encorder\ coordinate,\ x'', y'', z''; hall\ coordinate$$
$$x = -x' = -y''$$
$$y = y' = -x''$$
$$z = -z' = z''$$

また、$hall\ coordinate$ と $magnet\ coordinate$ は向きだけの変換で済むが $magnet\ coordinate$ と $encorder\ coordinate$ は位置の変換なので、それらのおおまかな変換もしなければいけない。それらの式は以下のようになる。

$$x = \begin{cases} (-x' + 65536)/20 - x_0 & (x' \geq 30000) \\ -x'/20 - x_0 & (x' \leq 30000) \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} y'/20 + y_0 & (y' \leq 20000) \\ (y' - 65536)/20 + y_0 & (y' \geq 20000) \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} (-z' + 65536)/20 + z_0 & \\ (-z' - 65536)/20 + z_0 & overflow \\ -z'/20 + z_0 & underflow \end{cases}$$

ただし、x_0 , y_0 , z_0 は、測定の範囲により異なる値を持つ物であり、a,b,c,d,e,f,g 全てで微妙に異なる。また、電圧値にも同様のずれの分をあらわす値があり、$residual\ voltage$ と呼ばれる。これはデータ毎に異なる値を持ち、以前のホール素子のキャリブレーションをした際に求めてあるものを用いる事にする。

2.2.4　ホール座標と磁石座標への変換

ホール座標から磁石座標への変換を考える。この変換が必要なのは

1. V_i ($i = x, y, z$) $[mV]$
2. R_i ($i = x, y, z$) $[V/TA]]$
3. P_i ($i = x, y, z$) $[V/T^2A]$

である。これらを上の座標系のところで述べた規則に従い、変換する。しかし位置の場合と異なり、向き $(\pm)$ を変えるだけである。

2.3　ループ計算を用いた磁場の大きさの計算

2.2.1　ホール効果の復習

ホール効果により生じる電圧に関する式は以下のようになる。

$$V = RB_nI - PB_t{}^2I\sin 2\psi + V_0 \tag{14}$$

B_n:磁場の素子平面に垂直な方向 (**n**ormal conmponet) の大きさ
B_t:磁場の素子平面方向 (**t**angential　component) の大きさ
R:ホール係数　, I:電流の大きさ　, P:プレナーホール係数
ψ:I と $\mathbf{B}_t$ の為す角度　, V_0:residual voltage

今回はこの式を用いて、それぞれの方向の磁場を求め、それらを他の方向の B を求める式に代入し、ループ計算する事でより正確な磁場の値を求める。そのループ計算をする前に、まず ψ についての考察をする。

2.3.2　一般的な ψ についての考察

上の式より求めるべきは B_n である。何故ならプレナーホール効果は (ノーマル) ホール効果に比べて影響が小さく、B_t を算出するのは困難であるからである。よって B_n を算出し、それをループ計算する事でその収束した値を求める。一般的には

$$B_n \,=\, (V \,+\, PB_t{}^2I\cos 2\psi \,-\, V_0)\,/R_H\,I$$

となる。まずはこの中の ψ について考える。
ψ とは電流と B_t の為す角度である。まずは、一般的に 3 次元で考えてみ

る。はじめにそれぞれのベクトルを考えてみる。

$$\mathbf{I} = I_x\mathbf{i} + I_y\mathbf{j} + I_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B_t} = B_{tx}\mathbf{i} + B_{ty}\mathbf{j} + B_{tz}\mathbf{k}$$

さらにこれらのベクトルが為す角度は内積を用いてあらわす事が出来る。

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \mathbf{I}\cdot\mathbf{B_t} \\ &= \frac{I_xB_{tx} + I_yB_{ty} + I_zB_{tz}}{|I|\,|B_t|}\end{aligned}$$

これを解く為に、まずある仮定を取り入れる。
それは電流の方向である。これをある一方向にとる。ここでは求める磁場の方向と垂直方向その電流の向きをとる事にする。そしてここで電流の大きさを 1 と仮定する。そう出来る理由は、ここで問題となっているのは角度である為にその大きさは任意で良く、向きを一方向に取った事も手伝って、結局その大きさは上の式の分子、分母でキャンセルしてしまう為である。
では、この仮定をした理由について述べる。
まず、電流はホール素子の中を流れているが、それは軸に沿って流れているはずである。何故なら素子の中を斜めに電流が流れている事は考えられないし、素子が軸に対してひどく傾いていると言うことはデータから推測するにありえないからである。よってこの仮定をした事で、状態に対する考察が正しくない方向に行くとは考えられず、この仮定は正しいものであると断言できる。

これについての数式でのアプローチをしてみる。まず、例として x 方向の磁場を調べて見る事にする。この時、仮に電流の向きを $+y$ 方向にとる。すると上の式は

$$\cos\psi = \frac{I_yB_{ty}}{|I|\,|B_t|} = \frac{B_y}{\sqrt{{B_y}^2 + {B_z}^2}}$$

である。また、これより

$$\sin\psi = \sqrt{1 - \frac{{B_y}^2}{{B_y}^2 + {B_z}^2}} = \frac{B_z}{\sqrt{{B_y}^2 + {B_z}^2}}$$

となる。よってこれら 2 式より

$$\begin{aligned}\sin 2\psi &= 2\cos\psi\ \sin\psi \\ &= 2\frac{B_y\ B_z}{{B_y}^2 + {B_z}^2}\end{aligned}$$

となる。また電流の向きを $+z$ 方向にすると、

$$\begin{aligned}\cos\psi &= \frac{I_z B_{tz}}{|I|\,|B_t|} \\ &= \frac{B_z}{\sqrt{{B_y}^2+{B_z}^2}}\end{aligned}$$

だから、同様にこの場合の $\sin 2\psi$ を求めると、

$$\begin{aligned}\sin 2\psi &= 2\cos\psi\sin\psi \\ &= 2\frac{B_y\ B_z}{{B_y}^2+{B_z}^2}\end{aligned}$$

というかたちになる。つまり、どちらも同じ結果を生み出すのである。よってこの事より、電流の方向は考えなくても良いと言うことが分る。そしてその変換式としては

$$\begin{aligned}{B_x}' &= ({V_x}' + {P_x}'({B_y}'^2+{B_z}'^2)I * \frac{2\ {B_y}'\ {B_z}'}{{B_y}'^2+{B_z}'^2} - {V_{0x}}')\,/{R_x}'\,I \\ &= ({V_x}' + 2\ {P_y}'\ {B_y}'\ {B_z}'\ I\ - {V_{0x}}')\,/{R_x}'\,I \\ {B_y}' &= ({V_y}' + 2\ P'\ {B_x}'\ {B_z}'I\ - {V_{0y}}')\,/{R_y}'\,I \\ {B_z}' &= ({V_z}' + 2\ {P_z}'\ {B_x}'\ {B_y}'I\ - {V_{0z}}')\,/{R_z}'\,I\end{aligned}$$

となる。ただし、これはホール座標での議論である事を強調するために、変換の必要があるものには' を付けた。つまり、これらを磁石座標へと変換してやらないといけない。3.2.3 で述べた関係に従って変換する事にする。つまり、電圧値と磁場の強さ及び各ホール係数についてである。それを考慮に加えた場合の式は

$$\begin{aligned}B_x &= -{B_y}' = (-{V_y}' - 2\ {P_y}'\ {B_x}'\ {B_z}'\ I\ + V_{0y})\,/{R_y}'\ I \\ &= (V_x + 2\ P_x\ B_y\ B_z\ I\ - V_{0x})\,/R_x\ I \\ B_y &= -{B_x}' = (-{V_x}' - 2\ {P_x}'\ {B_y}'\ {B_z}'I\ + {V_{0x}}')\,/{R_x}'\ I \\ &= (V_y + 2\ P_y\ B_x\ B_z\ I\ - V_{0y})\,/R_y\ I \\ B_z &= {B_z}' = ({V_z}' + 2\ {P_z}'\ {B_x}'\ {B_y}'I\ - {V_{0z}}')\,/{R_z}'\ I \\ &= (V_y - 2\ P_z\ B_x\ B_y\ I\ + V_{0z})\,/R_z\ I\end{aligned}$$

以上のように変換式が求められる。

2.3.3 ループ計算

この上の式を見れば分かるように、それぞれの方向の磁束密度の大きさを求める式には、他の方向の磁束密度が影響を及ぼす項 (プレナーホール

効果) があり、お互いに関係しあっている。よってまずはホール効果のみで与えられたを求め、そしてそれを初期値として互いのプレナーの項に代入していく事でループ計算をし、それにより　より精密な B_n を求める。これがループ計算のおおまかな概要である。この計算は C 言語で書いてあるが、それは最後に添付する。

2.4　データのプロット

以上のようにして求めたデータの一つをまずプロットしてみる。

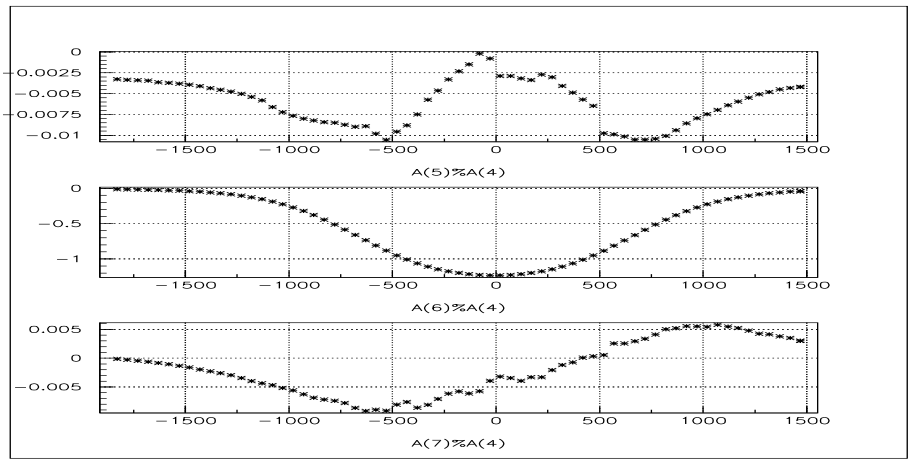

図 1: データプロット

これは $x = 49.95$, $y = 1.65$ での $B_i\ VS\ z\ (i = 1, 2, 3.....)$ とした場合のデータのプロットである。図の上から B_x, B_y, B_z である。B_x,B_z が多少ぶれているのは、値の大きさが小さい為に測定精度による誤差が大きく影響を与えるものと思われる。さらにループ計算をしたときに他の方向磁場の大きさとの位相差による影響を受けた為ではないかと思われる。その位相差は、主にプレナーホール効果から効いてくるためにこれを無視してみるとどうなるのか試してみたのだが、結局は磁場の大きさが小さくなるとプレナー効果の持つ影響が大きくなり、無視できなくなっていることがわかった。よって多少の悪影響はあるものの、プレナー効果の項は無視してはいけない。また上のものと同様の理由で、B_y は値が大きいために測定精度によるぶれ、もしくは測定値の統計的な揺らぎからの影響は相対的に小さくなり、図のようなきれいなプロットになるのであると思われる。

これを 3 次元でプロットしてみたらどうなるのか見てみる。このプロットは上の 2 次元のものと違い、PAW ではなく、gnuplot でプロットしてある。よって見た目が多少異なるのであるが、それはあまり気にすべきではない (P20 参照)。

3　まとめ

　ホール素子のキャリブレーション、それを用いた磁場の構築をしてきた。プロット結果を見る限りではおかしな結果にはなっていないように思われる。B_x B_z に関してはもう少し改良の余地などありそうだが、それは以後への課題としようと思う。

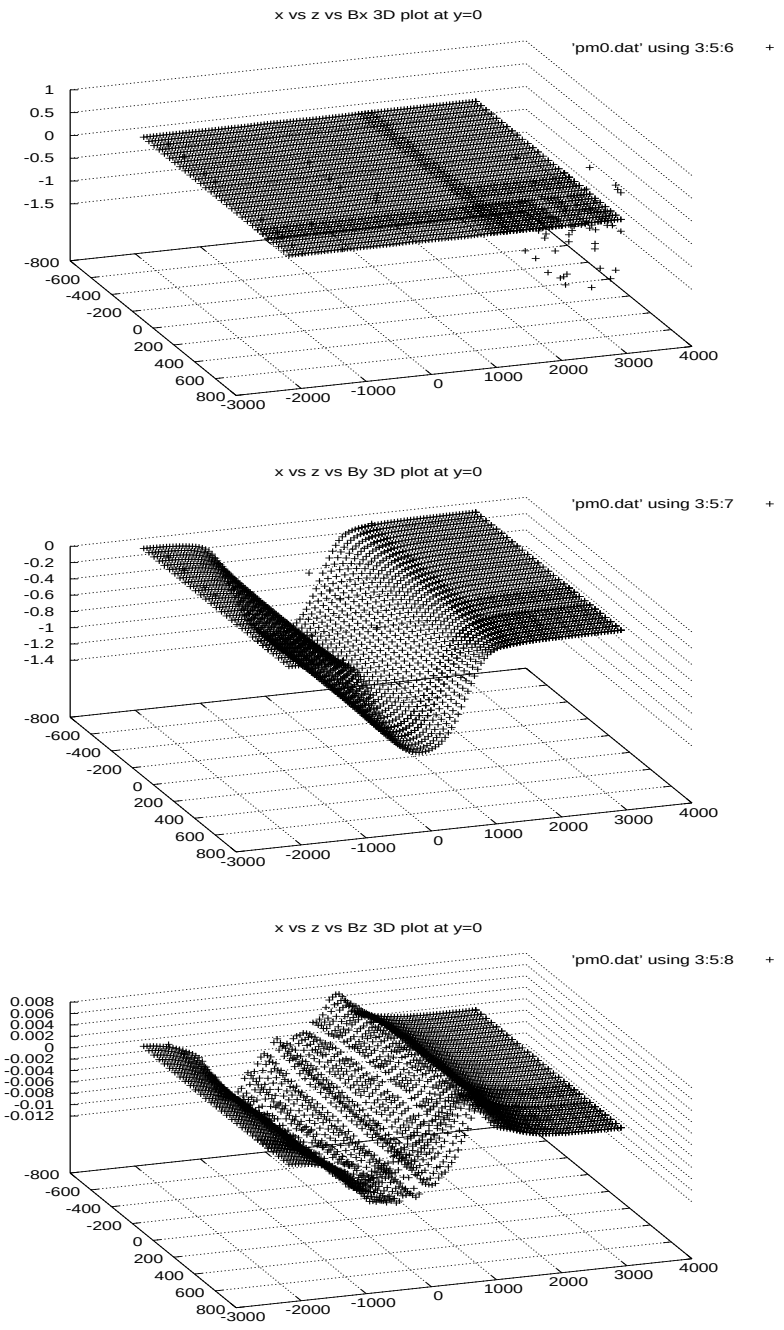

図 2: データプロット (3 次元)